XX.3.7 Ένα αεροπλάνο έχει μήκος ηρεμίας ίσο με $L_0 = 10$ m και κινείται, ως προς έναν παρατηρητή στο έδαφος, με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του ήχου στον αέρα, $V = 343$ m/s. Υπολογίστε τη συστολή που θα μετρήσει ο παρατηρητής στο μήκος του αεροπλάνου.

ΛΥΣΗ

Για $V = 343$ m/s, είναι $\beta = (343)/(3\times10^8) = 1{,}14\times10^{-6}$ και

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(1{,}14\times10^{-6})^2}} \approx 1+\frac{1}{2}(1{,}14\times10^{-6})^2 = 1+6{,}5\times10^{-13} =$$
$$= 1{,}000\,000\,000\,000\,65$$

Ο παρατηρητής θα βρει ότι το αεροπλάνο έχει μήκος $L = L_0/\gamma$. Επομένως, η συστολή στο μήκος του αεροπλάνου που θα μετρήσει θα είναι ίση με

$$\Delta L = L_0 - L = L_0\left(1-1/\gamma\right) = 10\left[1-1/\left(1+6{,}5\times10^{-13}\right)\right]$$
$$\approx 10\left[1-\left(1-6{,}5\times10^{-13}\right)\right] = 6{,}5\times10^{-12}\ \text{m}$$

Η συστολή είναι δηλαδή της τάξης του 1/100 της ατομικής διαμέτρου!

3.7 Παρατηρητής S είναι ακίνητος στο μέσο μιας ευθείας ΑΒ, η οποία έχει μήκος $2L$, όπως το μετράει αυτός. Ένας άλλος παρατηρητής, S΄ κινείται κατά μήκος της ευθείας ΑΒ με ταχύτητα $V = \frac{3}{5}c$ ως προς τον S. Και οι δύο παρατηρητές βρίσκονται στην αρχή των αξόνων του αντίστοιχου συστήματός τους, και στο ίδιο σημείο όταν τα ρολόγια και των δύο δείχνουν $t = t' = 0$.

(α) Πόσο είναι το μήκος της ευθείας ΑΒ όπως το μετρά ο S΄;

(β) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εκπέμπονται ταυτόχρονα στο σύστημα S δύο παλμοί από τα σημεία Α και Β. Να βρεθούν, στο σύστημα S΄, οι θέσεις των σημείων Α και Β όταν εκπέμπονται οι παλμοί, καθώς και η χρονική στιγμή της εκπομπής του κάθε παλμού στο σύστημα S΄.

(γ) Σε ποιες χρονικές στιγμές, T_A και T_B, θα φθάσουν οι παλμοί στον S, και σε ποιες (T'_A και T'_B) θα φθάσουν στον S΄;

ΛΥΣΗ

(α) Ο παρατηρητής S΄ βλέπει την ευθεία ΑΒ να κινείται με ταχύτητα $V = \frac{3}{5}c$, στην οποία αντιστοιχεί παράγοντας Lorentz $\gamma = 5/4$. Το μήκος της ευθείας που θα μετρήσει θα είναι επομένως ίσο με $2L/\gamma = 8L/5 = 1{,}6L$.

(β) Οι δύο παλμοί που εκπέμπονται στο σύστημα S ορίζονται ως τα εξής δύο συμβάντα:

Συμβάν Α: Παλμός στο Α, με συντεταγμένες $x_A = -L$, $t_A = 0$

Συμβάν Β: Παλμός στο Β, με συντεταγμένες $x_B = L$, $t_B = 0$

Οι συντεταγμένες των δύο συμβάντων στο σύστημα S΄ είναι:

Συμβάν A: Παλμός στο A, με συντεταγμένες

$$x'_A = \gamma\left(x_A - Vt_A\right) = \frac{5}{4}\left(-L - \frac{3}{5}c \times 0\right) = -\frac{5}{4}L$$

$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{V}{c^2}x_A\right) = \frac{5}{4}\left(0 - \frac{3}{5c}(-L)\right) = \frac{3}{4}\frac{L}{c}.$$

Συμβάν B: Παλμός στο B, με συντεταγμένες

$$x'_B = \gamma\left(x_B - Vt_B\right) = \frac{5}{4}\left(L - \frac{3}{5}c \times 0\right) = \frac{5}{4}L$$

$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{V}{c^2}x_B\right) = \frac{5}{4}\left(0 - \frac{3}{5c}(L)\right) = -\frac{3}{4}\frac{L}{c}.$$

(γ) Οι χρόνοι, T_i, στους οποίους ο παλμοί φτάνουν στον καθένα παρατηρητή βρίσκεται αν προσθέσουμε στον χρόνο στον οποίο συνέβη ο παλμός στο σύστημά του τον χρόνο που απαιτείται για να φτάσει το σήμα σε αυτόν: $T_i = t_i + |x_i|/c$ και $T'_i = t'_i + |x'_i|/c$.

$$T_A = t_A + \frac{|x_A|}{c} = 0 + \frac{|-L|}{c} = \frac{L}{c}, \qquad T_B = t_B + \frac{|x_B|}{c} = 0 + \frac{|L|}{c} = \frac{L}{c}.$$

$$T'_A = t'_A + \frac{|x'_A|}{c} = \frac{3}{4}\frac{L}{c} + \frac{5}{4}\frac{L}{c} = 2\frac{L}{c},$$

$$T'_B = t'_B + \frac{|x'_B|}{c} = -\frac{3}{4}\frac{L}{c} + \frac{5}{4}\frac{L}{c} = \frac{1}{2}\frac{L}{c}.$$

Φ.1 Μια ράβδος έχει μήκος ηρεμίας L_0 και βρίσκεται ακίνητη κατά μήκος του άξονα των x' στο αδρανειακό σύστημα S΄, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα άλλο σύστημα S. Ένας παρατηρητής στο σύστημα S σημειώνει τους χρόνους t_A και t_B κατά τους οποίους τα δύο άκρα της ράβδου περνούν από μπροστά του και υπολογίζει το μήκος της ράβδου ως $(t_B - t_A)V$. Δείξετε ότι στη μέτρησή του θα παρατηρηθεί η συστολή του μήκους της ράβδου.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι, στο σύστημα S, ο παρατηρητής βρίσκεται στο σημείο $x=0$. Παρατηρεί τη θέση και τον χρόνο για τα εξής δύο συμβάντα:

Συμβάν Α – το προπορευόμενο άκρο της ράβδου περνά από το σημείο $x=0$:

$x_A=0, \quad t_A$

Συμβάν Β – το πίσω άκρο της ράβδου περνά από το σημείο $x=0$:

$x_B=0, \quad t_B$

Συμπεραίνει ότι το μήκος της ράβδου είναι ίσο με $L=(t_B-t_A)V$.

Μετασχηματίζουμε για να βρούμε τους χρόνους στους οποίους τα δύο συμβάντα παρατηρούνται στο σύστημα S΄:

Συμβάν Α: $t'_A=\gamma\left(t_A+\frac{V}{c^2}x_A\right)=\gamma t_A$

Συμβάν Β: $t'_B=\gamma\left(t_B+\frac{V}{c^2}x_B\right)=\gamma t_B$

Ο παρατηρητής στο σύστημα S΄, στο οποίο η ράβδος είναι ακίνητη, βλέπει τον άλλο παρατηρητή να κινείται με ταχύτητα $-V$ και να περνά από το ένα άκρο της ράβδου τη χρονική στιγμή $t'_A=\gamma t_A$ και από το άλλο τη χρονική στιγμη $t'_B=\gamma t_B$. Αυτός ο παρατηρητής θα εκτιμήσει το μήκος (ηρεμίας) της ράβδου ως

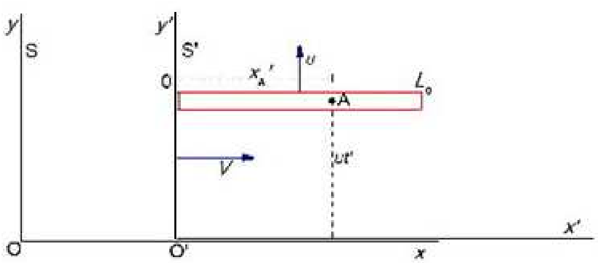
$$L_0=V(t'_B-t'_A)=\gamma V(t_B-t_A)=\gamma L.$$

Επομένως, $L=L_0/\gamma$ και παρατηρείται συστολή στο μήκος της ράβδου.

Φ.2 Μια ευθύγραμμη ράβδος είναι παράλληλη προς τον άξονα των x' στο αδρανειακό σύστημα S΄, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V}=V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα άλλο αδρανειακό σύστημα, το S. Η ράβδος κινείται μέσα στο σύστημα S΄, στην κατεύθυνση y', με σταθερή ταχύτητα υ. Να βρεθεί η θέση της ράβδου στο σύστημα S, συναρτήσει του χρόνου.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι τη στιγμή $t'=0$ η ράβδος συμπίπτει στο σύστημα S΄ με τον άξονα των x'. Τη χρονική στιγμή t', ένα σημείο Α της ράβδου έχει συντεταγμένες:



$$x', \quad y' = \upsilon t', \quad z', \quad t'.$$

Στο σύστημα S: $\quad y = y' = \upsilon t'$.

Όμως, $\quad t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right)$, $\quad$ η χρήση της οποίας δίνει:

$y = \upsilon\gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right)$, $\quad$ ή $\quad y = \upsilon\gamma t - \dfrac{\upsilon V}{c^2}\gamma x$. Για δεδομένο t, αυτή είναι η εξίσωση ευθείας με κλίση $\tan\theta = -\dfrac{\upsilon V}{c^2}\gamma$.

Η ράβδος συμπίπτει στο σύστημα S με αυτήν την ευθεία, και, επομένως, σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία

$$\theta = -\arctan\left(\frac{\upsilon V}{c^2}\gamma\right)$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Για να βρούμε τη θέση κάθε σημείου της ράβδου συναρτήσει του χρόνου στο σύστημα S, θα εξετάσουμε τη θέση ενός σημείου A, που στο σύστημα S′ έχει συντεταγμένη x' ίση με

$$x'_A = \alpha L_0 \quad (0 \le \alpha \le 1).$$

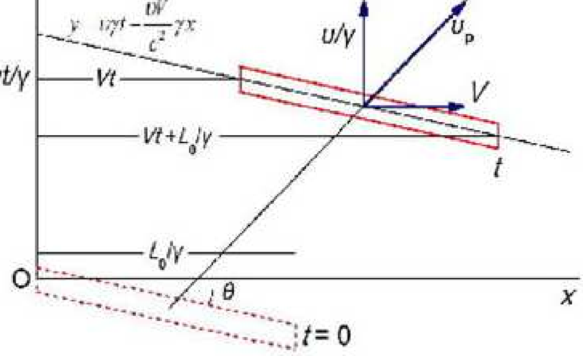
Επομένως, η θέση του A τη στιγμή t' είναι:

$$x'_A = \alpha L_0, \quad y'_A = \upsilon t', \quad z'_A = 0.$$

Στο σύστημα S, είναι

$$x_A = \gamma\left(x'_A + Vt'\right) = \gamma\left[\alpha L_0 + V\gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x_A\right)\right] = \gamma\alpha L_0 + V\gamma^2 t - \frac{V^2}{c^2}\gamma^2 x_A$$

η οποία δίνει τελικά $\quad x_A = \dfrac{\alpha L_0}{\gamma} + Vt$.



Επίσης,

$$y_A = y'_A = \upsilon t' = \upsilon\gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x_A\right) = \upsilon\gamma\left[t - \frac{V}{c^2}\left(\frac{\alpha L_0}{\gamma} + Vt\right)\right] =$$
$$= \upsilon\gamma t - \frac{\upsilon V}{c^2}\alpha L_0 - \upsilon\gamma\frac{V^2}{c^2}t$$

η οποία δίνει τελικά $y_A = \dfrac{\upsilon t}{\gamma} - \dfrac{\upsilon V}{c^2}\alpha L_0$.

Στο σύστημα S, το ένα άκρο της ράβδου (για $\alpha = 0$) βρίσκεται, συναρτήσει του χρόνου, στη θέση

$$x_A(0) = Vt\,, \qquad y_A(0) = \frac{\upsilon t}{\gamma}\,.$$

Το άλλο άκρο (για $\alpha = 1$) βρίσκεται στη θέση

$$x_A(1) = \frac{L_0}{\gamma} + Vt\,, \qquad y_A(1) = \frac{\upsilon t}{\gamma} - \frac{\upsilon V}{c^2}L_0\,.$$

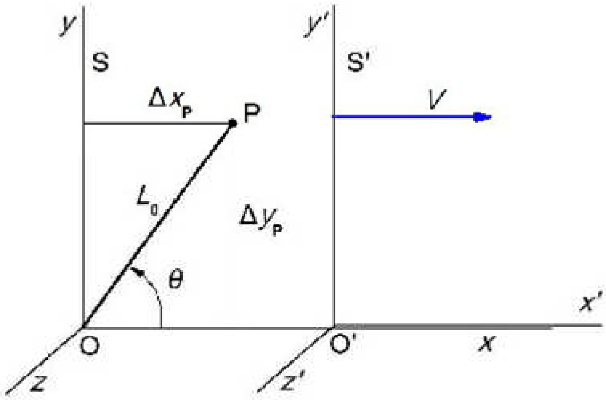
Το ολικό μήκος της ράβδου στο σύστημα S είναι ίσο με

$$L = \sqrt{[x_A(1) - x_A(0)]^2 + [y_A(1) - y_A(0)]^2} = \sqrt{\left(L_0/\gamma\right)^2 + \left(-\upsilon V L_0/c^2\right)^2} =$$
$$= L_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}$$

Συνοψίζοντας, παρατηρούμε ότι, στο σύστημα S, η ράβδος υφίσταται συστολή κατά παράγοντα γ στην κατεύθυνση της σχετικής κίνησης των δύο συστημάτων αναφοράς και έχει κλίση θ ως προς τον άξονα των x.

XX.3.12 *Ο μετασχηματισμός της γωνίας.* Μια ευθεία βρίσκεται στο επίπεδο xy και σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x, στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S. Ποια είναι η γωνία θ' που σχηματίζει η ευθεία στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς S΄, το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S΄;

ΛΥΣΗ



Η προβολή της ευθείας πάνω στους δύο άξονες του συστήματος S έχουν μήκη

$$\Delta x_P = L_0 \cos\theta \quad \text{και} \quad \Delta y_P = L_0 \sin\theta .$$

Στο σύστημα S΄, αυτά τα μήκη είναι

$$\Delta x'_P = \Delta x_P / \gamma = \left(L_0 \cos\theta\right)/\gamma$$

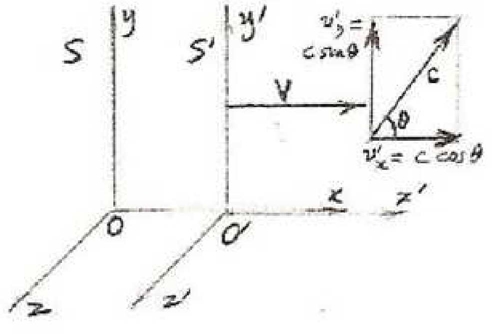
και $\quad \Delta y'_P = \Delta y_P = L_0 \sin\theta$.

Επομένως, η κλίση θ' της ευθείας στο σύστημα αναφοράς S΄ δίνεται από τη σχέση

$$\tan\theta' = \frac{\Delta y'_P}{\Delta x'_P} = \frac{L_0 \sin\theta}{\left(L_0 \cos\theta\right)/\gamma} \qquad \tan\theta' = \gamma \tan\theta$$

ή $\quad \theta' = \arctan\left(\gamma \tan\theta\right)$.

3.14 Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς S΄ κινείται με σταθερή ταχύτητα $V\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα αναφοράς S. Στο S΄, ένα φωτόνιο έχει συνιστώσες ταχύτητας $\upsilon'_x = c\cos\theta$ και $\upsilon'_y = c\sin\theta$. Βρείτε τις τιμές των συνιστωσών στο σύστημα S και δείξετε ότι η ταχύτητα του φωτονίου στο S είναι ίση με c. Ποια γωνία σχηματίζει με τον άξονα των x η κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου στο σύστημα S;



ΛΥΣΗ

Το τετράγωνο της ταχύτητας του φωτονίου στο σύστημα αναφοράς S΄ είναι:

$$\upsilon_x'^2 + \upsilon_y'^2 = c^2 .$$

Ο μετασχηματισμός του Lorentz για τις συνιστώσες της ταχύτητας δίνει τις σχέσεις

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \dfrac{\upsilon'_x V}{c^2}}, \qquad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{\upsilon'_x V}{c^2}\right)}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι $$\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \frac{\left(\upsilon'_x + V\right)^2 + \upsilon_y'^2\left(1 - V^2/c^2\right)}{\left(1 + \dfrac{\upsilon'_x V}{c^2}\right)^2}$$

Αναπτύσσοντας,

$$\upsilon_x^2+\upsilon_y^2=\frac{\upsilon_x'^2+2V\upsilon_x'+V^2+\upsilon_y'^2-\left(V^2/c^2\right)\upsilon_y'^2}{\left(1+\dfrac{\upsilon_x'V}{c^2}\right)^2}$$

$$=\frac{c^2+V^2+2Vc\cos\theta-V^2\sin^2\theta}{\left(1+\dfrac{V}{c}\cos\theta\right)^2}=\frac{c^2+2Vc\cos\theta+V^2\cos^2\theta}{\dfrac{1}{c^2}\left(c+V\cos\theta\right)^2}=c^2$$

Όπως περιμέναμε, μια ταχύτητα ίση με c στο S΄ παραμένει στο S ίση με c.

Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των x η κατεύθυνση κίνησης του φωτονίου στο σύστημα S, θα είναι

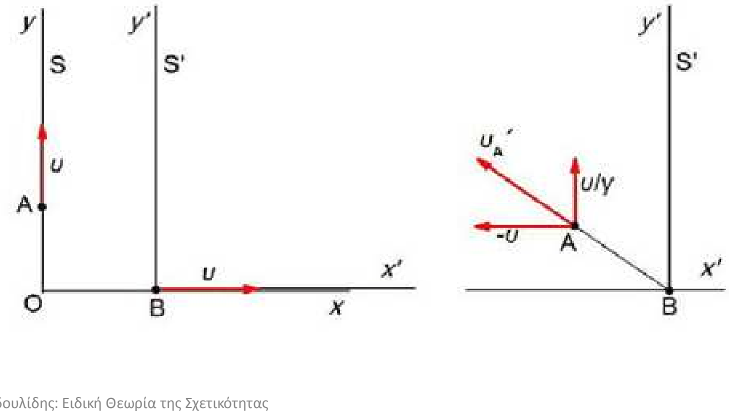
$$\tan\theta=\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=\frac{\upsilon_y'}{\gamma\left(\upsilon_x'+V\right)}=\frac{c\sin\theta'}{\gamma\left(c\cos\theta'+V\right)}\quad\Rightarrow\quad\tan\theta=\frac{\sin\theta'}{\gamma\left(\cos\theta'+\beta\right)}$$

ή

$$\theta=\arctan\left[\frac{\sin\theta'}{\gamma\left(\cos\theta'+\beta\right)}\right].$$

Φ.3 Δύο σωματίδια εκτοξεύονται ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο μέσα σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, με ταχύτητες υ, σε ορθογώνιες μεταξύ τους κατευθύνσεις. Δείξετε ότι η ταχύτητα κάθε σωματιδίου ως προς το άλλο έχει μέτρο $\upsilon\sqrt{2-\upsilon^2/c^2}$.

ΛΥΣΗ



Θεωρούμε ότι το σωματίδιο A κινείται με ταχύτητα υ κατά μήκος του άξονα των y στο σύστημα αναφοράς S. Θεωρούμε επίσης ότι το σωματίδιο B βρίσκεται στην αρχή των αξόνων ενός συστήματος αναφοράς S΄ και παίρνουμε τους άξονες των x και x' να συμπίπτουν με την κατεύθυνση κίνησης του σωματιδίου B. Το σύστημα S΄, επομένως, κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}=\upsilon\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς το σύστημα S.

Στο σύστημα S, το σωματίδιο A έχει συνιστώσες ταχύτητας $\upsilon_{Ax}=0,\quad \upsilon_{Ay}=\upsilon,\quad \upsilon_{Az}=0$.

Στο σύστημα S΄, οι συνιστώσες της ταχύτητας του σωματιδίου Α είναι:

$$\upsilon'_{Ax} = \frac{\upsilon_{Ax} - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon_{Ax}\upsilon}{c^2}} = -\upsilon, \qquad \upsilon'_{Ay} = \frac{\upsilon_{Ay}}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon_{Ax}\upsilon}{c^2}\right)} = \frac{\upsilon}{\gamma}, \qquad \upsilon'_{Az} = \frac{\upsilon_{Az}}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon_{Ax}\upsilon}{c^2}\right)} = 0$$

Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου Α στο σύστημα S΄ είναι:

$$\upsilon'_A = \sqrt{\upsilon'^2_{Ax} + \upsilon'^2_{Ay} + \upsilon'^2_{Az}} = \sqrt{\upsilon^2 + \frac{\upsilon^2}{\gamma^2}} = \upsilon\sqrt{1 + \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)}$$

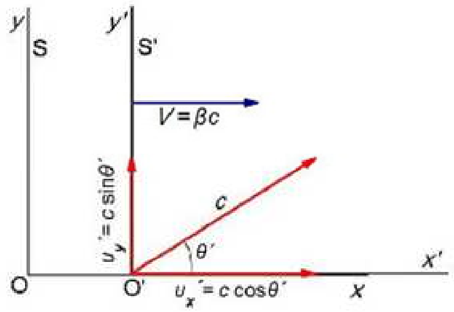
ή $$\upsilon'_A = \upsilon\sqrt{2 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

που είναι επίσης το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου Α ως προς το σωματίδιο Β, και αντιστρόφως.

Φ.5 Μια δέσμη φωτός εκπέμπεται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ' με τον άξονα των x' στο αδρανειακό σύστημα S΄. Το σύστημα S΄ κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V} = c\beta\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα άλλο σύστημα S. Δείξετε ότι η γωνία θ που σχηματίζει η κατεύθυνση διάδοσης της δέσμης με τον άξονα των x στο σύστημα S δίνεται από τη σχέση: $\cos\theta = \dfrac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}$.

Υπόδειξη: Μετασχηματίστε τις συνιστώσες της ταχύτητας ενός φωτονίου από το S΄ στο S.

ΛΥΣΗ



Σχήμα (α) Ένα φωτόνιο κινείται στο σύστημα αναφοράς S΄ σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ' με τον άξονα των x'.

Θα εξετάσουμε ένα φωτόνιο, το οποίο, στο σύστημα S΄ έχει κατεύθυνση κίνησης που σχηματίζει γωνία θ' με τον άξονα των x', όπως φαίνεται στο Σχ. (α). Στο σύστημα αυτό, το φωτόνιο έχει συνιστώσες της ταχύτητας:

$$\upsilon'_x = c\cos\theta', \quad \upsilon'_y = c\sin\theta'.$$

Φυσικά είναι $\sqrt{\upsilon'^2_x + \upsilon'^2_y} = c$.

Μετασχηματίζοντας στο σύστημα S,

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + V}{1 + \dfrac{\upsilon'_x V}{c^2}} = c\,\frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \qquad \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y}{\gamma\left(1 + \dfrac{\upsilon'_x V}{c^2}\right)} = c\,\frac{\sin\theta'}{\gamma\left(1 + \beta\cos\theta'\right)}$$

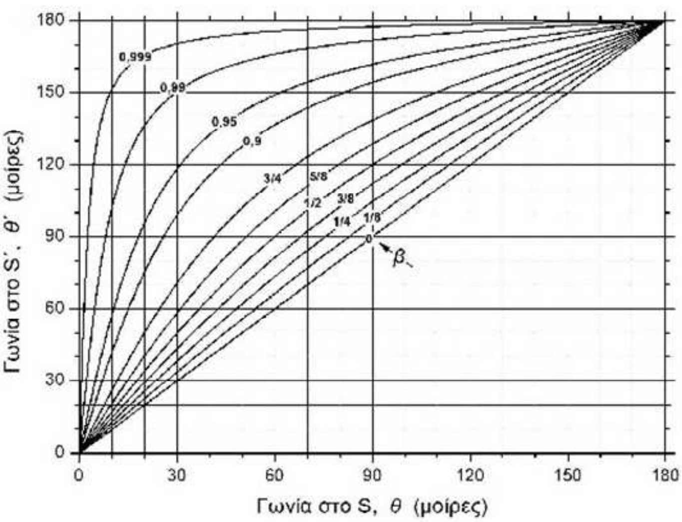
Προφανώς είναι $\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = c$. Η γωνία θ που σχηματίζει η ταχύτητα του φωτονίου με τον άξονα των x στο σύστημα αναφοράς S δίνεται από τη σχέση:

$$\cos\theta = \frac{\upsilon_x}{c} = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}. \qquad (1)$$

Αντιστρόφως,

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}. \qquad (2)$$

Η γωνία θ' σχεδιάζεται συναρτήσει της γωνίας θ στο Σχ. (β).



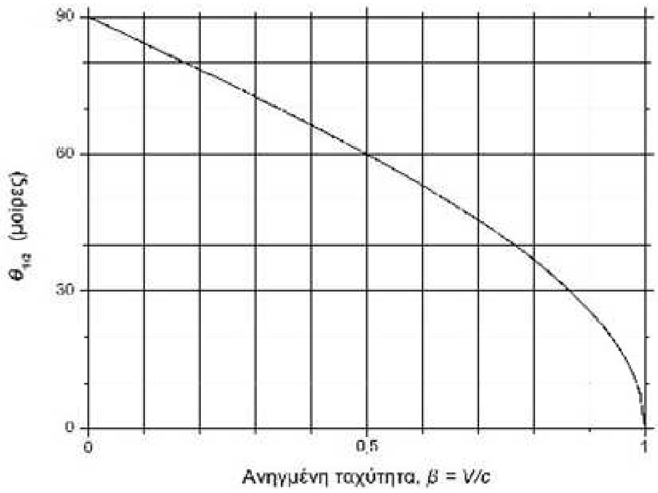
Σχήμα (β) Ένα φωτόνιο κινείται στο σύστημα αναφοράς S΄ σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ' με τον άξονα των x'. Το σύστημα S΄ κινείται με ταχύτητα $\mathbf{V} = c\beta\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα άλλο σύστημα αναφοράς S. Στο σύστημα S, το φωτόνιο κινείται σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα των x. Η γωνία θ' δίνεται συναρτήσει της γωνίας θ, για διάφορες τιμές του β.

Το φαινόμενο του προβολέα

Γνωρίζουμε ότι στο σύστημα S΄ τα μισά φωτόνια εκπέμπονται ανάμεσα στις γωνίες $-\theta'_{1/2}$ και $\theta'_{1/2}$, όπου $\theta'_{1/2}=90°$. Στο σύστημα αναφοράς S, ο κώνος μέσα στον οποίο εκπέμπονται τα μισά φωτόνια με συνιστώσα προς την κατεύθυνση της $\mathbf{V}$ έχει γωνία κορυφής $\theta_{1/2}$ η οποία αντιστοιχεί στη γωνία $\theta'=\pi/2$. Θέτοντας $\theta'=\pi/2$ στην Εξ. (1) βρίσκουμε $\cos\theta_{1/2}=\beta$. Η γωνία $\theta_{1/2}$ είναι, επομένως, ίση με

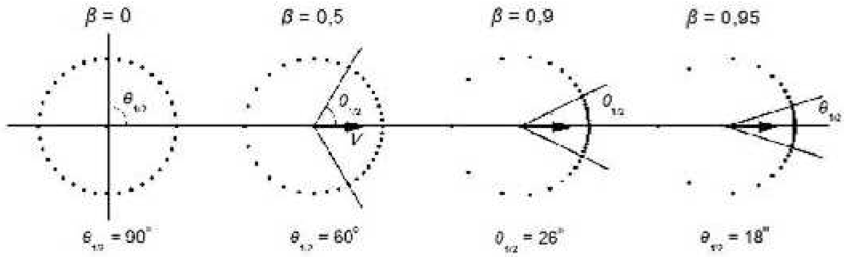
$$\theta_{1/2}=\arccos\beta\,. \qquad (3)$$

Η γωνία $\theta_{1/2}$ σχεδιάζεται συναρτήσει του β στο Σχ. (γ).



Σχήμα (γ) Η γωνία κορυφής $\theta_{1/2}$ του κώνου μέσα στον οποίο εκπέμπονται τα μισά φωτόνια από μια πηγή που κινείται στο σύστημα S με ταχύτητα $V=c\beta$, συναρτήσει του β. Τα φωτόνια εκπέμπονται με κάποια συνιστώσα της ταχύτητάς τους στην κατεύθυνση κίνησης της πηγής.

Στο Σχ. (γ) σχεδιάστηκε, για διάφορες ταχύτητες της πηγής, ένας αριθμός φωτονίων που κινούνται από το κέντρο ενός κύκλου προς τα έξω. Στο σύστημα αναφοράς στο οποίο η πηγή είναι ακίνητη $(\beta=0)$, τα φωτόνια εκπέμπονται ισοτροπικά με την ίδια ροή ανά μονάδα στερεάς γωνίας προς όλες τις κατευθύνσεις. Καθώς η ταχύτητα της πηγής αυξάνει, ο κώνος μέσα στον οποίο εκπέμπονται τα μισά φωτόνια, με συνιστώσα ταχύτητας στην κετεύθυνση κίνησης της πηγής, έχει μικρότερη γωνία κορυφής, $\theta_{1/2}$. Η γωνία αυτή τείνει στο μηδέν καθώς το β τείνει στη μονάδα. Αυτό είναι γνωστό ως το *φαινόμενο του προβολέα*. Το φως που εκπέμπει μια πηγή συγκεντρώνεται σε κατευθύνσεις που σχηματίζουν ολοένα και μικρότερες γωνίες με τη διανυσματική ταχύτητα της πηγής, καθώς η ταχύτητα της πηγής αυξάνει.



Σχήμα (δ) Η γωνία κορυφής $\theta_{1/2}$ του κώνου μέσα στον οποίο εκπέμπονται τα μισά φωτόνια από μια πηγή που κινείται στο σύστημα S με ταχύτητα $V = c\beta$, για διάφορες τιμές του β . Για $\beta = 0$ τα φωτόνια φαίνονται να εκπέμπονται ισοτροπικά προς όλες τις κατευθύνσεις. Όσο το β πλησιάζει τη μονάδα, η γωνία $\theta_{1/2}$ γίνεται ολοένα και πιο μικρή.

Το φαινόμενο επιδεικνύεται δραματικά στην εκπομπή της *ακτινοβολίας συγχρότρου*, καθώς φορτισμένα σωματίδια κινούνται σε κυκλική τροχιά με μαγάλες ταχύτητες σε ένα σύγχροτρο. Η κεντρομόλος επιτάχυνση των σωματιδίων λόγω της κίνησής τους πάνω σε μια κυκλική τροχιά, οδηγεί στην εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, δηλαδή φωτονίων, με ενέργειες μεταξύ ενός κλάσματος του eV μέχρι και της τάξης μεγέθους των keV. Διαπιστώνεται ότι τα φωτόνια αυτά κινούνται σχηματίζοντας πολύ μικρές γωνίες με την ταχύτητα των φορτίων σε κάθε σημείο του επιταχυντή, δηλαδή εκπέμπονται σε κατευθύνσεις κοντά στο επίπεδο της τροχιάς και εφαπτομενικές της κυκλικής τροχιάς.

4.1 Σε ένα σημείο παράγονται σωματίδια, τα οποία κινούνται με ταχύτητα $\upsilon = \frac{4}{5}c$. Τα σωματίδια είναι ασταθή, με μέσο χρόνο ζωής $\tau = 10^{-8}$ s (στο δικό τους σύστημα αναφοράς). Μετά από πόσο χρόνο, όπως μετριέται στο εργαστήριο, θα μειωθεί ο αριθμός αυτών των σωματιδίων κατά έναν παράγοντα e (e = 2,71828...); Πόση είναι η απόσταση που θα διανύσουν τα σωματίδια σε αυτόν τον χρόνο; Πόση είναι στο σύστημα των σωματιδίων αυτή η απόσταση;

ΛΥΣΗ

Στο σύστημα των σωματιδίων, σύμφωνα με τον νόμο $N / N_0 = e^{-t/\tau}$, ο αριθμός των σωματιδίων μειώνεται κατά έναν παράγοντα e σε χρόνο $\Delta t' = \tau = 10^{-8}$ s. Στο σύστημα του εργαστηρίου αυτός ο χρόνος είναι $\Delta t = \gamma \Delta t'$, όπου $\gamma = 1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2} = 1/\sqrt{1-(4/5)^2} = 5/3$.

Επομένως, $\Delta t = (5/3)\times 10^{-8}\ \text{s} = 1{,}67\times 10^{-8}\ \text{s}$.

Σε αυτόν τον χρόνο, τα σωματίδια θα διανύσουν, στο σύστημα του εργαστηρίου, απόσταση

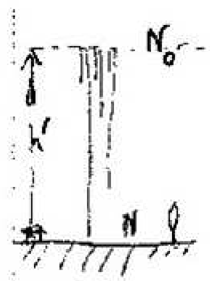
$$l = \upsilon \Delta t = (4/5)\times 3\times 10^{-8} \times (5/3)\times 10^{-8} = 4\ \mathbf{m}.$$

Στο σύστημα των σωματιδίων, η απόσταση αυτή φαίνεται ίση με

$$l' = l/\gamma = (4\ \text{m})/(5/3) = 2{,}4\ \text{m}.$$

Φυσικά, στο σύστημά τους, τα σωματίδια είναι ακίνητα. Ένας παρατηρητής στο σύστημα των σωματιδίων θα παρατηρήσει το εργαστήριο να μετατοπίζεται κατά **3 m** στο χρόνο που απαιτείται για να μειωθεί ο αριθμός των σωματιδίων κατά ένα παράγοντα e.

4.5 Μια δέσμη σωματιδίων μ παράγεται σε κάποιο ύψος στην ατμόσφαιρα. Τα σωματίδια κινούνται με ταχύτητα $\upsilon_\mu = 0{,}99\,c$ κατακόρυφα προς τα κάτω. Τα σωματίδια μ διασπώνται σε ηλεκτρόνια και νετρίνα ($\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$) με μια μέση διάρκεια ζωής $\tau_\mu = 2$ μs στο δικό τους σύστημα αναφοράς.



(α) Υπολογίστε το ύψος στο οποίο παράγονται τα σωματίδια, αν ένα ποσοστό 1% αυτών επιζούν και φθάνουν στην επιφάνεια της Γης.

(β) Πόσο είναι το μήκος αυτής της διαδρομής, όπως το βλέπουν τα σωματίδια;

ΛΥΣΗ

(α) Στο σύστημα αναφοράς της Γης (S΄), το ποσοστό των επιζώντων σωματιδίων μετά από χρόνο t' είναι $N/N_0 = \mathrm{e}^{-t'/\tau'_\mu}$,

όπου $\tau'_\mu = \gamma_\mu \tau_\mu$ είναι η μέση διάρκεια ζωής των μιονίων στο σύστημα S΄.

Για $\beta_\mu = 0{,}99$ είναι $\gamma_\mu = 7{,}09$ και $\tau'_\mu = 7{,}09 \times 2 \times 10^{-6} = 1{,}42 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}$.

Ο χρόνος t' για τον οποίο θα είναι $N/N_0 = 0{,}01$, δίνεται επομένως από τη σχέση

$$0{,}01 = \mathrm{e}^{-t'/1{,}42\times10^{-5}\ \mathrm{s}}, \quad \text{από όπου} \quad \ln 0{,}01 = -\ln 100 = -\frac{t'}{1{,}42\times 10^{-5}\ \mathrm{s}}$$

και, τελικά, $t' = 6{,}54 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}$.

Στη διάρκεια του χρόνου αυτού, στο σύστημα S΄, τα μιόνια διανύουν απόσταση

$$h' = \beta_\mu c t' = 19\ \mathrm{km}$$

και αυτό είναι το ύψος πάνω από την επιφάνεια της Γης στο οποίο παράγονται τα μιόνια.

(β) Στο σύστημα αναφοράς των μιονίων (S), ισχύει η σχέση

$$N/N_0 = \mathrm{e}^{-t/\tau_\mu}.$$

Τώρα είναι $$\ln 0{,}01 = -\ln 100 = -\frac{t'}{2\times10^{-6}\ \mathrm{s}}$$

και επομένως $t = 9{,}3 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$.

(Εναλλακτικά, είναι $t = t'/\gamma_\mu$ και, επομένως,

$$t = (6{,}54\times10^{-5}\ \mathrm{s})/7{,}0 = 9{,}3\times10^{-6}\ \mathrm{s}.)$$

Αυτός είναι ο χρόνος που βλέπουν τα σωματίδια να διαρκεί το ταξίδι στην ατμόσφαιρα. Στη διάρκεια του χρόνου αυτού, τα μιόνια βλέπουν την ατμόσφαιρα να μετακινείται, στο δικό τους σύστημα αναφοράς, S, κατά απόσταση

$$h = \beta_\mu c t = 2{,}7\ \mathrm{km}.$$

Αυτό είναι το πάχος της ατμόσφαιρας όπως το βλέπουν τα μιόνια.

Φ.8 Μια συγκεκριμένη γραμμή στο φάσμα του φωτός από ένα νεφέλωμα έχει μήκος κύματος **656 nm** αντί των 434 **nm** που έχει στο εργαστήριο. Αν το νεφέλωμα κινείται ακτινικά, ποια είναι η ταχύτητά του ως προς τη Γη;

ΛΥΣΗ

Αν το β θεωρείται θετικό όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, η σχέση ανάμεσα στα μήκη κύματος είναι

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

όπου $\lambda_0 = 434 \text{ nm}$ είναι το μήκος κύματος στο σύστημα αναφοράς της πηγής και $\lambda = 656 \text{ nm}$ το μήκος κύματος στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Λύνοντας για το β,

$$\beta = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} = \frac{656^2 - 434^2}{656^2 + 434^2} = 0,391.$$

Επειδή το β είναι θετικό, το νεφέλωμα απομακρύνεται από τη Γη με ταχύτητα $V = 0,391c$.

5.2 Ποια είναι η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου του οποίου η κινητική ενέργεια είναι 2 MeV; Ποιος είναι ο λόγος της μάζας του προς τη μάζα ηρεμίας του;

ΛΥΣΗ

Η κινητική του ενέργεια δίνεται από τη σχέση $K = m_0 c^2 \gamma - m_0 c^2$.

Για το ηλεκτρόνιο είναι $m_0 c^2 = 0,511 \text{ MeV}$. Επομένως,

$$2 \text{ MeV} = (0,511 \text{ MeV}) \times \gamma - 0,511 \text{ MeV}$$

από την οποία προκύπτει ότι $\gamma = 5$ και $\upsilon = 0,98c$.

Ο λόγος της μάζας του ηλεκτρονίου με κινητική ενέργεια 2 MeV προς τη μάζα ηρεμίας του είναι:

$$\frac{m}{m_0} = \gamma = 5$$

Φ.13 Η κινητική ενέργεια και η ορμή ενός σωματιδίου μετρήθηκαν και βρέθηκαν ίσα με 250 MeV και 368 Mev / c, αντίστοιχα. Να βρεθεί η μάζα του σωματιδίου σε Mev / c^2.

ΛΥΣΗ

Αν E, p, K και m_0 είναι, αντίστοιχα, η ολική ενέργεια, η ορμή, η κινητική ενέργεια και η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου, ισχύουν οι σχέσεις

$$E = m_0 c^2 + K \quad \text{και} \quad E^2 = \left(m_0 c^2\right)^2 + \left(pc\right)^2 .$$

Επομένως, $\left(m_0 c^2 + K\right)^2 = \left(m_0 c^2\right)^2 + \left(pc\right)^2$, από την οποία έχουμε

$$\cancel{\left(m_0 c^2\right)^2} + 2m_0 c^2 K + K^2 = \cancel{\left(m_0 c^2\right)^2} + \left(pc\right)^2$$

και, τελικά, $$m_0 c^2 = \frac{\left(pc\right)^2 - K^2}{2K} .$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε: $m_0 c^2 = \dfrac{368^2 - 250^2}{2 \times 250} = 270$ MeV

και, επομένως, η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου είναι $m_0 = 270$ MeV/c^2.

5.10 Ακίνητο σωματίδιο με μάζα ηρεμίας M διασπάται σε ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m και ένα φωτόνιο. Να βρεθούν οι ενέργειες αυτών των προϊόντων.

ΛΥΣΗ

Διατήρηση της ενέργειας: $Mc^2 = mc^2\gamma + E_\gamma$ (1)

Διατήρηση της ορμής: $\dfrac{E_\gamma}{c} = mc\beta\gamma$ (2)

Αντικαθιστώντας την E_γ από την εξίσωση (2) στην εξίσωση (1), έχουμε

$$M = m\gamma + m\beta\gamma = m\gamma(1+\beta) = m\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Αυτή η εξίσωση δίνει $\qquad \dfrac{1+\beta}{1-\beta} = \dfrac{M^2}{m^2}, \qquad \beta = \dfrac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}$

Και $\qquad \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{M^2-m^2}{M^2+m^2}\right)^2}} = \dfrac{M^2+m^2}{\sqrt{4m^2M^2}} = \dfrac{M^2+m^2}{2mM}$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1),

$$E_\gamma = (M - m\gamma)c^2 = \left(M - m\frac{M^2+m^2}{2mM}\right)c^2 = \left(M - \frac{M^2+m^2}{2M}\right)c^2$$

Επομένως, η ενέργεια του φωτονίου είναι:

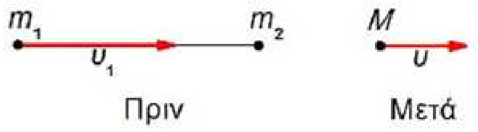
$$E_\gamma = \frac{M^2 - m^2}{2M}c^2 .$$

Η ενέργεια του σωματιδίου δίνεται από τη σχέση $E = Mc^2 - E_\gamma$, από την οποία προκύπτει ότι

$$E = \frac{M^2 + m^2}{2M}c^2 .$$

Φ.19 Ένα σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_1 και ταχύτητα υ_1 συγκρούεται με ακίνητο σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m_2. Τα δύο σωματίδια ενώνονται σε ένα συσσωμάτωμα με μάζα ηρεμίας M, που κινείται με ταχύτητα υ. Δείξετε ότι είναι $\upsilon = (m_1\gamma_1\upsilon_1)/(m_1\gamma_1 + m_2)$ και $M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2$, όπου $\gamma_1 = 1\big/\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}$.

ΛΥΣΗ



Η σύγκρουση περιγράφεται στο σχήμα. Οι αρχές διατήρησης δίνουν:

Ενέργεια: $m_1\gamma_1 + m_2 = M\gamma$ (1)

Ορμή: $m_1\gamma_1\upsilon_1 = M\gamma\upsilon$ (2)

όπου $\gamma = 1\big/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$. Απαλείφοντας το γινόμενο $M\gamma$ ανάμεσα στις Εξ. (1) και (2), έχουμε

$$m_1\gamma_1\upsilon_1 = m_1\gamma_1\upsilon + m_2\upsilon, \qquad \text{η οποία δίνει} \qquad \upsilon = \frac{m_1\gamma_1\upsilon_1}{m_1\gamma_1 + m_2}.$$

Από αυτή την τιμή προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 = 1 - \left(\frac{m_1\gamma_1\beta_1}{m_1\gamma_1 + m_2}\right)^2$$

Υψώνοντας την Εξ. (1) στο τετράγωνο και αντικαθιστώντας για το $1/\gamma^2$, έχουμε

$$M^2 = \frac{1}{\gamma^2}(m_1\gamma_1 + m_2)^2 = (m_1\gamma_1 + m_2)^2 - m_1^2\gamma_1^2\beta_1^2,$$

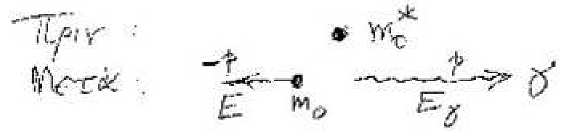
$$M^2 = m_1^2\gamma_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\gamma_1 - m_1^2\gamma_1^2\beta_1^2,$$

$$M^2 = m_1^2\gamma_1^2\left(1-\beta_1^2\right) + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2$$

και, τελικά, $$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_1 m_1 m_2.$$

5.12 *Αποδιέγερση πυρήνα.* Ένας πυρήνας X^* με μάζα ηρεμίας m_0^* αποδιεγείρεται εκπέμποντας ένα φωτόνιο. Μετά την αποδιέγερση, η μάζα ηρεμίας του πυρήνα είναι m_0. Ποιες είναι οι ενέργειες του νέου πυρήνα και του φωτονίου, στο σύστημα αναφοράς του αρχικού πυρήνα;

ΛΥΣΗ



$$X^* \to X + \gamma$$

Από τη διατήρηση της ορμής προκύπτει ότι οι ορμές του νέου πυρήνα και του φωτονίου θα είναι ίσες και αντίθετες, $\pm p$.

Διατήρηση της ενέργειας: $$E + E_\gamma = m_0^* c^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Διατήρηση της ορμής: $$p = \frac{E_\gamma}{c} \qquad \textbf{(2)}$$

Επίσης, για τον νέο πυρήνα, $$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 . \qquad \textbf{(3)}$$

Αντικαθιστώντας την E_γ από την εξίσωση (2) στην εξίσωση (1), έχουμε

$$E + pc = m_0^* c^2 . \qquad \textbf{(4)}$$

Η εξίσωση (3) γράφεται ως $$(E - pc)(E + pc) = m_0^2 c^4 . \qquad \textbf{(5)}$$

Αντικαθιστώντας από την (4) στην (5)

$$(E - pc) m_0^* c^2 = m_0^2 c^4 \quad \text{ή} \quad E - pc = \frac{m_0^2}{m_0^*} c^2 . \qquad \textbf{(6)}$$

Αθροίζοντας τις εξισώσεις (4) και (6) και διαιρώντας διά 2, βρίσκουμε την ενέργεια του νέου πυρήνα:

$$E = \frac{1}{2}\left(m_0^* c^2 + \frac{m_0^2}{m_0^*} c^2 \right) \quad \text{ή} \quad E = \frac{m_0^{*2} + m_0^2}{2 m_0^*} c^2 .$$

Η ενέργεια του φωτονίου είναι:

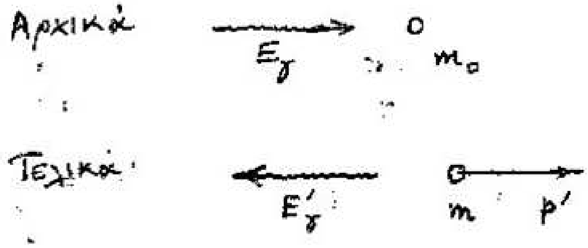
$$E_\gamma = m_0^* c^2 - E = \left(m_0^* - \frac{m_0^{*2} + m_0^2}{2 m_0^*} \right) c^2 \quad \text{ή} \quad E_\gamma = \frac{m_0^{*2} - m_0^2}{2 m_0^*} c^2 .$$

6.1 Φωτόνιο ενέργειας E_γ συγκρούεται με ακίνητο ηλεκτρόνιο, που έχει μάζα ηρεμίας m_0. Μετά τη σκέδαση, το φωτόνιο κινείται σε κατεύθυνση αντίθετη της αρχικής. Να βρεθούν:

(α) Το κλάσμα της ενέργειας E_γ που δίνεται στο ηλεκτρόνιο ως κινητική ενέργεια,

(β) Η μεταβολή στο μήκος κύματος λ του φωτονίου.

ΛΥΣΗ



Μετά την κρούση, το ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα υ, στην οποία αντιστοιχεί ο παράγοντας **Lorentz** γ. Θα χρησιμοποιήσουμε τους νόμους της διατήρησης της ενέργειας και της ορμής.

Η διατήρηση της ενέργειας δίνει:

$$E_\gamma + m_0 c^2 = E'_\gamma + mc^2, \qquad \text{όπου} \quad m = \gamma m_0 .$$

Η διατήρησης της ορμής δίνει:

$$\frac{E_\gamma}{c} = -\frac{E'_\gamma}{c} + p', \qquad \text{όπου} \quad p = m\upsilon = \beta\gamma c m_0 .$$

Αυτές οι εξισώσεις δίνουν

$$E_\gamma + m_0 c^2 = E'_\gamma + \gamma m_0 c^2 \qquad \text{και} \qquad E_\gamma = -E'_\gamma + \beta\gamma m_0 c^2$$

Αν ορίσουμε τα μεγέθη $\varepsilon \equiv \dfrac{E_\gamma}{m_0 c^2}$, $\varepsilon' \equiv \dfrac{E'_\gamma}{m_0 c^2}$

Έχουμε $\varepsilon + 1 = \varepsilon' + \gamma$ και $\varepsilon = -\varepsilon' + \beta\gamma$.

Προσθέτοντας, $1 + 2\varepsilon = \gamma(1+\beta)$.

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο,

$$(1+2\varepsilon)^2 = \gamma^2(1+\beta)^2 = \frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

και $(1+2\varepsilon)^2 - (1+2\varepsilon)^2\beta = 1+\beta$

από την οποία προκύπτει ότι $\beta = \dfrac{(1+2\varepsilon)^2 - 1}{(1+2\varepsilon)^2 + 1}$

και επομένως $$\gamma = \frac{1+2\varepsilon}{1+\beta} = \frac{1+2\varepsilon}{\dfrac{(1+2\varepsilon)^2-1}{(1+2\varepsilon)^2+1}+1} = \frac{(1+2\varepsilon)[(1+2\varepsilon)^2+1]}{2(1+2\varepsilon)^2}.$$

Τελικά, $\gamma = \dfrac{(1+2\varepsilon)^2+1}{2(1+2\varepsilon)}$.

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $K = m_0 c^2(\gamma - 1)$ και επομένως

$$K = m_0 c^2\left[\frac{(1+2\varepsilon)^2+1}{2(1+2\varepsilon)} - 1\right] = \frac{m_0 c^2}{2}\left(\frac{1+\cancel{4\varepsilon}+4\varepsilon^2+1-2-\cancel{4\varepsilon}}{1+2\varepsilon}\right).$$

$$K = m_0 c^2\left[\frac{(1+2\varepsilon)^2+1}{2(1+2\varepsilon)} - 1\right] = \frac{m_0 c^2}{2}\frac{4\varepsilon^2}{1+2\varepsilon} = 2E_\gamma \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}$$

Επομένως, $\dfrac{K}{E_\gamma} = \dfrac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}$, και επειδή είναι $\varepsilon = \dfrac{E_\gamma}{m_0 c^2}$,

προκύπτει ότι $\dfrac{K}{E_\gamma} = \dfrac{2E_\gamma}{m_0 c^2 + 2E_\gamma}$, ή $\dfrac{K}{E_\gamma} = \dfrac{1}{1+\dfrac{m_0 c^2}{2E_\gamma}}$.

(β) Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι ίση με τη μεταβολή στην ενέργεια του φωτονίου:

$$E_\gamma - E'_\gamma = K .$$

Από αυτήν προκύπτει ότι $\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}$, $\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda} \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon}$

ή $\frac{\lambda}{\lambda'} = 1 - \frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon} = \frac{1}{1+2\varepsilon}$, και τελικά $\lambda' = \lambda(1+2\varepsilon)$.

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{2E_\gamma}{m_0c^2}\right) = \lambda\left(1 + \frac{2hc}{\lambda m_0 c^2}\right) \quad \text{και} \quad \lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_0 c} .$$

Επομένως $$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{m_0 c} .$$